Title	中国古代の周率(上) (数学史の研究)
Author(s)	杉本, 敏夫
Citation	数理解析研究所講究録 (2011), 1739: 91-101
Issue Date	2011-04
URL	http://hdl.handle.net/2433/170883
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
第1739巻 2011年 91-101

中国古代の周率（上）

Calculations of pi in the ancient China (Part I)

杉本　敏夫

Sugimoto Toshio

第1節　序

この論文は、私が二回の国際会議［1，2］で、英文資料を配布して英語で発表した内容に、その後の研究成果を補足し、報告することを目指す。両会議の主催者とも、proceedings印刷の予定はないので、発表者が補足発表し、印刷しても構わない、と言った。私はその後も研究を続け、新たな知見を得たので、２回に分けて報告しようと思う。（上）では、劉徽による周率の計算を批判的に報告し、祖沖之による精密な周率の計算を詳細に跡付けたい。特に後者が、計算を或る段階で打ち切った事情を追求する。（下）では、祖による有名な「密率」335/113 の発見が、π という特別な数値に由来することを実証する。

第２節　九章算術の劉徽註

「九章算術」は、中国古代の数学的知識の集大成であり、後漢初年（一世紀）には成立した、と言う。３世紀に劉徽が詳細な注解を書き、劉徽註と共に読まれる。ここでは川原氏の翻訳［3］を利用し、手許の［4］戴震校訂版と、小林龍彦氏より頂いた［5］中国版を対校に用いた。本稿(上)、(下)で扱う範囲では、［6］銭宝琮の論文集中の「中国算書中之周率研究」が詳細であり、中国の国際会議［1］では、銭論文への批判が主目的であった。（本稿は立場を変えた。）

第３節　周率の研究

周率は、直径１なる円の円周の長さ3.14159… のことであり、西洋では π なる文字で表される。第１図によって、[6] 銭論文 54～55 頁の表の一部を訂正・追加して、各概念を整理する。外面積を追加した。（末位は四捨五入した。）

辺数	各辺長	周	内面積	面積差	外面積
6	1.	6.	–	–	–
12	0.517638	6.211656	3.	–	–
24	0.261052	6.265248	3.105828	0.105828	3.211656

劉徽は、半径１の円の内接正十二角形の辺長 0.517638 を 12 倍して、周を 6.211656 とした。正十二角形の面積は、下図の凧 ACBO の 6 倍であり、凧の面積は AB×CO÷2＝1×1÷2＝ 0.5 だから、内面積は 6 倍して 3 となる。以下、周と内面積とは辺数の数え方がずれるので、注意が必要である。さらに正廿四角形は、正十二角形の辺長 0.517638, 凧の面積は 0.517638×1÷2＝0.258819, 面積は 12 倍で、3.105828 となる。正十二角形との面積差（劉はこれを「差冪」と呼ぶ）0.105828 を加えた面積 EFBOA(野球の本塁の形に相当)、即ち、外面積は 3.211656 となる。(劉は内・外面積の概念を持ち、用語としては用いない。以下便宜のために用いる。）以下の各数値は、数表 I を参照。

古代中国では、面積・体積問題、比例問題、納税・輸送の問題等が役人必携であった。特に田畑の面積評価が《課税》対象として重要で、正方形、矩形、梯形、等々の面積の課題が必携として課された。続いて、曲線で囲まれた土地(その典型は円形の土地)の面積が重要な課題となった。西洋で有名なアルキメデスの外接形は、線分 EF の延長と、半径の延長との交点 G, H を、中心 O と結ぶ二等辺三角形 GHO を考えた。中国流より面積が広い。(内接形は正弦と調和し、外接形は正接と調和するので、数値計算では三角形 GHO が愛用される。)

第４節　公式集

半径 1 の円に内接する、一辺が x なる正 2^n・6 角形から、正 2^{n+1}・6 角形の一辺 y を求めることを考えよう。第１図で、AO＝CO＝BO＝1 とする。

辺 AB＝x の2倍角の辺 AC＝y は、

(1)　AB＝x

(2)　AD＝$x/2$

(3)　$AD^2 = (x/2)^2 = x^2/4$

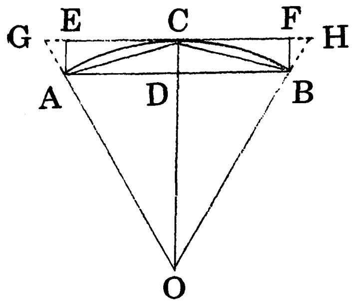
(4)　$DO^2 = u^2 = 1^2 - x^2/4$

(5)　$DO = u = \sqrt{1^2 - x^2/4}$

(6)　CD＝$v = 1 - u$

(7)　$AC^2 = y^2 = x^2/4 + v^2$
$\qquad = AD^2 + CD^2$

(8)　$AC = y = \sqrt{x^2/4 + v^2}$



第１図

の８段階を辿る。辺数 $6 \cdot 2^n$ を掛けて、

(9)　内面積＝ $6 \cdot 2^n \times y$

を得る。[３] に引用された「劉徽註九章算術」では、(1) x,　(3) $x^2/4$,　(5) u,　(6) $1-u$,　(7) y^2 が克明に記され、各段階での計算結果が辿れる。本稿の第一の目標は、劉徽の計算を検算して、その誤りを指摘し、私の精確な計算と比較し、その「誤りの原因」を探ることにある。**数表 I** を参照されたい。

［補足］**捷径**　劉徽も祖沖之も（恐らく和算家も）気付かなかった捷径がある。

$AC^2 = AD^2 + CD^2, \quad 1^2 = CD^2 + 2CD \cdot DO + DO^2, \quad 1^2 = AD^2 + DO^2$

から、 $AD^2 = CD^2 + 2CD \cdot DO$ を得て、第一式に代入し、$CD + DO = 1$ の関係を用いて、$AC^2 = CD^2 + 2CD \cdot DO + CD^2 = 2CD \cdot (CD + DO) = 2CD$

これから次の有用な公式（捷径）を得る。

(10)　　$AC^2 = 2CD$

第5節　開帯従平方

［6］銭宝琮の「中国数学史」、［3］川原氏の翻訳 56 頁に、「開帯従平方」が解説されている。通常の「開平方」が、二次の方程式

(11)　　$x^2 = c$

を解くのに対して、開帯従平方は、一次の項(従) bx を伴う(帯)二次方程式

(12)　　$x^2 + bx = c$

を解く。第7節で必要な $\sqrt{0.75}$ を求めよう。$t = 0.8$ ならば $0.75 - t^2 = 0.11$ で不足する。 $t = 0.8 + x$ と置き、$0.75 = 0.64 + 1.6x + x^2$, ここから、

(13)　　$x^2 + 1.6x = 0.11$

なる開帯従平方を得、x は小なので x^2 を無視し、$x = 0.11 / 1.6 = 0.06875.$

(14)　　$x = 0.86 + y$

と置けば、次の式を得る。

(15)　　$y^2 + 1.72y = 0.75 - 0.86^2 = 0.75 - 0.7396 = 0.0104.$

再び y^2 を無視し、$y = 0.0104 / 1.72 = 0.00604\,65116$ を得る。云々。

途中は（似たような計算が続くが）省略することにして、最後に

(16)　$\sqrt{0.75} = 0.86602\,54037\cdots \ [= \sqrt{3} \div 2]$

に達する。これから目標の $1 - \sqrt{0.75} = 0.13397\,45962\cdots$ を得たのであろう。

劉徽は、第4節の式 (5) や式 (8) の開平の第二段階以降は、この開帯従平法を駆使したであろう。電卓を用いて「検算」する私の場合、開平計算には通常の「$\sqrt{\ }$キー」を用い、それより長い桁の場合、プログラム電卓の中に自作した、有効数字(mantissa) 約 25 桁の精度で計算可能な「長尺開平」を用いた。

第6節 単位と表示

古代特有の表示法について、川原氏［3］の注記に従い、単位と表示について、いささか補足する。例えば 0.75 の平方根 $\sqrt{0.75} = 0.86602\,54037\cdots$ を、原文では小数7位まで示す。古代中国の表示法を尺の上から書くと、

丈、尺、寸、分、厘、豪、秒、忽、微

である（厘は旧字体を通用の漢字に改めた）。原文は八寸六分六厘〇豪二秒五忽と小数第6位まで表示し、続く 0.4 を「五分の二忽」と分数 2/5 で表す。本稿

数表 I　劉徽の計算　　杉…杉本、　九…川原訳：九章算術、

六→十二	AB	AD^2	DO	CD	CD^2
杉	1	.25	.86602 54	.13397 4596	.01794 91924 31
九	1	.25	.86602 54	.1339$\underline{9}$ 46	*.01794 919$\underline{3}$4 45*
→廿四	AB	AD^2	DO	CD	CD^2
杉	.51763 8	.06698 72981 08	.96592 58263	.03407 41737	.00116 10493 14
九	*.51763 8*	.06698 7298$\underline{3\ 61}$	.96592 58___	.03407 42	*.00116 10493 14*
→四十八	AB	AD^2	DO	CD	CD^2
杉	.26105 2	.01703 70868 56	.99144 48614	.00855 51386 3	$.0^{4}7$ 31903 9691
九	*.26105 2*	.01703 708$\underline{73}$ $\underline{66}$	.99144 48	.00855 5$\underline{2}$	*$.0^{4}7$ 31903 96$\underline{13}$*
→九十六	AB	AD^2	DO	CD	CD^2
杉	.13080 63	.00427 75693 13	.99785 89232	.00214 10767 6	$.0^{5}45842$ 09698
九	.13080 6	.00427 7569$\underline{7}$ $\underline{0}$3	.99785 89	.00214 10$\underline{1}$	*$.0^{5}45842$ 96498*

復元の方法　(例)　十二　CD=.13397 4596　→　CD^2=.01794 91924 31,
AD^2=.25 との和が AC^2=.26794 91934 31 となり、 AC=.51763 80902 04,
廿四面積 6・AC=3.10582 85412. 〔参考〕 12・sin(π/12) =3.10582 85412 2.

数表 II　祖沖之の内面積の計算　第１行は上の限界、第３行は下の限界。

六 AD^2	DO	CD	CD^2
$.250^{9}33$	.86602 54037 82514	.13397 45962 17485	.01794 91924 31638
.25	.86602 54037 84$\underline{438}$	.13397 45962 16000	.01794 91924 312$\underline{40}$
$.249^{8}66$	.86602 54038 03683	.13397 45961 96319	.01794 91924 25966
十二 AD^2	DO	CD	CD^2　*7990→80
.06698 72981 082	.96592 58262 88805	.03407 41737 111	$.0^{2}116$ 10493 14100 63
.06698 72981 07$\underline{7}$	.96592 58262 8911$\underline{0}$	.03407 41737 108	$.0^{2}116$ 10493 140$\underline{79\ 90}$*
.06698 72981 072	.96592 58262 89341	.03407 41737 105	$.0^{2}116$ 10493 14064 11
3072 AB	AD^2　*73480 7280$\underline{7}$ $\underline{9}$	DO *41494 $\underline{708}$	CD^2
$.0^{2}204$ 53073 60641	$.0^{5}10458$ 20549 87	$.9^{6}4770$ 89588 345	$.0^{1\,2}273$ 43529 861
$.0^{2}204$ 53073 60505	$.0^{5}10458$ 20549 73*	$.9^{6}4770$ 89588 414*	$.0^{1\,2}273$ 43529 854
$.0^{2}204$ 53073 60369	$.0^{5}10458$ 20549 59	$.9^{6}4770$ 89588 484	$.0^{1\,2}273$ 43529 847
6144 AB	AD^2　*79252 9688$\underline{3}$ $\underline{9}$→4	DO *55888 $\underline{08}$→55888	CD^2
$.0^{2}102$ 26538 1401	$.0^{6}2614$ 55205 82	$.9^{6}8692$ 72388 54149	$.0^{1\,3}17$ 08970 83976
$.0^{2}102$ 26538 1394	$.0^{6}2614$ 55205 79*	$.9^{6}8692$ 72388 55888*	$.0^{1\,3}17$ 08970 83931
$.0^{2}102$ 26538 1387	$.0^{6}2614$ 55205 75	$.9^{6}8692$ 72388 57626	$.0^{1\,3}17$ 08970 83885

斜体…杉本の検算による推定値、 下線…劉徽の計算に含まれる誤り

AC^2	AC	十二内面積	十二外面積
.26794 91924 31	.51763 80902 04	3.	———
.26794 91934 45	*.51763 80911 84*	*3.*	———
AC^2	AC	廿四内面積	廿四外面積
.06814 83474 216	.26105 23844 4	3.10582 85409	3.21165 70818
.06814 83494 66	*.26105 23844 4*	*3.10582 85412*	*3.21165 70824*
AC^2	AC	四十八内面積	四十八外面積
.01711 02772 52	.13080 62584 6	3.13262 86133	3.15942 86854
.01711 02788 13	.13080 6	*3.13262 86143*	*3.15942 86874*
AC^2	AC	九十六内面積	九十六外面積
.00428 21535 228	.06543 81656 44	3.13935 0203	3.14607 179
.00428 21540 12	.06543 8	3.13934 4	3.14607 159
$24 \cdot \sin(\pi/24)$ =3.13262 86132 8		百九十二内面積	百九十二外面積
$48 \cdot \sin(\pi/48)$ =3.13935 02030 5		杉 3.14103 19508 9	3.14271 370
$96 \cdot \sin(\pi/96)$ =3.14103 19508 9		九 3.14102 40	3.14227 04

第２行が計算の主体（四ヶ所で、下線の数字を切り捨てた。本文 10 節を参照。）

AC^2	十二 AC	→(×6)→	廿四内面積
.26794 91924 34971	.51763 80902 08759		3.10582 85412 52556
.26794 91924 31200	.51763 80902 05116		3.10582 85412 30697
.26794 91923 92632	.51763 80901 67863		3.10582 85402 07178
AC^2	廿四 AC	→(×12)→	四十八内面積
.06814 83474 22388	.26105 23844 41108		3.13262 86132 962
.06814 83474 21780	.26105 23844 39943→40		3.13262 86132 800
.06814 83474 21182	.26105 23844 38798		3.13262 86132 655
AC^2	6144AC *13941 99367→13942		12288 内面積
. $0^5$10458 20823 30	.$0^2$102 26538 14009 99999		3.14159 25166 387
. $0^5$10458 20823 17	.$0^2$102 26538 13941 99367*		3.14159 25164 298→64 3
. $0^5$10458 20823 03	.$0^2$102 26538 13873 98735		3.14159 25162 208
AC^2	12288AC		24576 内面積
. $0^6$2614 55222 917	.$0^3$51 13269 23716 19579 69080		3.14159 26193 123
. $0^6$2614 55222 882	.$0^3$51 13269 23682 13713 40490		3.14159 26191 030
. $0^6$2614 55222 847	.$0^3$51 13269 23648 13711 93610		3.14159 26188 941

では普通の洋数字に直して、 0.8660254 と表す。帯分数の形で書けば、

$0.866025^{2}/_{5}=0.866025^{4}/_{10}$

となる。原文は分母・分子を約分する。本稿では通常の小数表示に直した。

第7節　検算の結果

数表Iと比べれば、文献［3］～［5］に見られる数値は大幅な誤りを伴うが、その後に登場する数値が案外正しい値に近いことから判断すれば、誤りは恐らく写本の伝承の途中で生じた「書き誤り」に過ぎないと思われる。私は、「中国人は祖先崇拝の慣習から、目前の写本の数値が、伝承の間に生じた書き誤りであろうと推測されたとしても、濫りに訂正しなかっただろう」と想像する。

目下の計算の場合、後に行くほど面積は少しづつ増えて、次第に真の面積に近づく。劉は、$n-1$ 番目の面積の値 S と n 番目の面積の値 T とから、

(17)　$T' = T + (T - S)$

を求める。T を「内面積」、T' を「外面積」と呼ぶ。その幾何学的意味は、第1図を用いて、第3節で説明した。数表Iに示した数値計算の結果に戻る。内面積、外面積の欄に見るような、小数 7 位までの値を検算したところ、途中の数値の表示された値（表示上の誤りをも含む）の元の数値は、末位を除き、ほぼ合っている。劉を引用する際、便宜のため現行の小数表示に改めた。

劉徽の成した計算は、「正 N 角形」から「正 $2N$ 角形」へと歩を進め、次第に内外から「円」に近づけようとする。第1図で言えば、辺 AB から、辺 AC を求める。用いるのは第4節の公式群であるが、二つの勾股(直角三角形) に対して勾股弦の公式(三平方の定理) を用いる。大勾股 AOD では、AD＝AB/2 が勾、DO が股、半径 AO が弦である。小勾股 CAD では、CD が小勾、AD が小股、最後に得られる辺 AC が小弦である。[3]『九章算術』(川原訳) を読む際、同じ長さが所により別の名称で呼ばれるので、この注意が必要。円の半径 1 尺を単位とするが、無名数として扱う。また、「正二十四角形」を「廿四角」と略す。

私の検算結果と劉の計算に対する意見は、凡て数表Iに盛り込んだ。個々の注意は、表内の記述を参照。劉の最終的な結論は、次の不等式に集約される。

(18)　$3.14103\,195 < \pi < 3.14271\,370$

劉自身の表現では、帯分数を用い、次の通り（小数に直したものも併用)。

(19)　$3.14^{64}/_{625} = 3.14102\,4 < \pi < 3.14207\,4 = 3.14^{169}/_{625}$

古代中国に「有効数字」の観念はあったか？　それは、[3]『劉徽注・九章算術』の表現を見れば分かる。例えば、正九十二角の弦冪について、

「…余分を捨てて、四十二億、七千七百五十六万、九千七百三平方惣となる。」

と書いてある。現行の洋算表示では（下線部の誤植を修正し）0.00427 75693 13 を表している。一貫して有効数字 10 桁で計算している。数値は小数点下 12 桁

ではなく、意味のある数値の桁数 10 桁を確実に把握しているので、「有効数字」の観念はあったと推測される。数表Ⅰの中で劉徽の実例は挙げにくい。私の数値 DO の 0.99785 89232 は、一見 10 桁に見えるが、実体は 1 から引いた値 1－0.00214 10768 であって、有効数字 8 桁を意味する。数表Ⅰから、劉が有効数字 10～11 桁で計算していたことが分かる。

私の結論。劉徽の計算は、末位を除き、凡て正しかったが、写本から写本へと書き写される間、多くの書き損じが生じた。だが後世の学者は誰も検算し、訂正しようとせず、いま見る劉の計算は、見るも無残な姿になっている。

［1］の会議で、私の発表には何の反響もなかった。その後、来日した研究者に尋ねたら、「恐らく英語による発表も原因でしょう。さらに内容も、中国人の研究動向から懸離れていたかもしれません。」とのこと。逆に、その会議における中国人研究者の報告（私に聞き取れた内容、発表要旨の中国文から理解した内容）は、祖先の業績の賛美に終始し、私の興味をそそる内容に乏しかった。

第８節　祖沖之の業績

祖沖之(425-500)は有名な割合に、その事跡の肝心な部分は、重要な文献の逸失により、殆ど伝わらない。銭宝琮の記述［3］、［6］に従ってまとめると、

（ⅰ）劉宋朝の役人で、何承天（次回に述べる）の元嘉暦を修改した。

（ⅱ）数学・天文学を研究し、また技術面では指南車などを作った。

（ⅲ）『綴術』なる数学書を著したが、伝承の途中で失せた。（後述のように、この逸失が彼の業績を甚だ分かり難くさせた。）

（ⅳ）特に重要な業績は、不等式

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927 \tag{20}$$

と、密率　335/113　の発見。（本稿では、密率は、(下)で扱う。）

国際会議［1］は祖沖之の生まれ故郷、淶水（河北省）で開かれた。

本稿（上）の目標は、この不等式 (20) が実際に成立することを、数値計算によって裏付けることである。しかし、祖を検算したくとも、『綴術』が失われたので、劉徽の場合のように参照すべき数値がない。参照できるのは結論としての式 (20) のみである。この不等式は、両辺の有効数字８桁だから、祖が計算に用いた数値も、知る由がない。一つの手掛かりとして、 第７節の劉徽は有効数字 11 ～ 12 桁を用いた。祖は、実はこれより多くの有効数字を用いていた！

私は苦心の末に、有効な手段に到達した。具体的には、この不等式の左辺が $T = 3.1415926$ であり、一つ手前の値が $S = 3.1415925$ だったと仮定すれば、

$$\begin{aligned} T + (T - S) &= 3.1415926 + (3.1415926 - 3.1415925) \\ &= 3.1415926 + 0.0000001 \end{aligned} \tag{21}$$

$$= 3.1415927$$

として得られる。それほど都合よく、このような数値が生ずるであろうか？

第９節　不等式の裏づけ

本来は、祖沖之の時代の技法に絞るべきである。しかし見当を付けるため、或る種の工夫を実行した。昨年の報告 [7] で示した公式

(22)　$n \sin(\pi/n) = \pi - \pi^3/6\,n^2 + \pi^5/120\,n^4 - \pi^7/5400\,n^6 + - \cdots$

が有用である。不等式 (21) の数値を小数点下 7 桁まで表示するには、小数点下、先の方までの値を用いて計算し、末位を丸めればよい。模索した末に

$$S = 6144 \sin(\pi/6144) = 3.14159\,25166 \cdots$$

$$T = 12288 \sin(\pi/12288) = 3.14159\,26193 \cdots$$

を思いついた。両者を小数 7 位まで残して、小数 8 位以下を切り捨てれば、$S = 3.14159\,25$, $T = 3.14159\,26$ となり、祖沖之の不等式(20)が成立する！

しかしこれは、現代的な方法によって推定される所の祖の不等式を得たのに過ぎず、なんら過去の計算を《復元》したことにはならない。数学史の目的は、現代の数学で過去の計算をなぞってみせること(往々にして解釈過剰)ではなく、過去の計算を当時の道具立てのみを用いて再現することである。

本稿（上）の目的は、[１] で発表した祖沖之による周率計算を再記し、併せてその後の私の成果を報告することである。計算の手順は劉徽の計算と同じであり、第４節の図と公式 (1) ～ (9) と全く同じである。これはまた、[6]銭宝琮の推論に従っている。数表Ⅱに各段階の値を示した。AD^2 は初め有効数字(mantissa)17 桁、後のほうで 14 桁、$DO^2 = 1 - AD^2$ は続く 9 の後の有効数字を 14 桁とした。 $AC^2 = AD^2 + CD^2$ の計算は、開平して辺長 AC を求めるために、(続く 0 の後に始まる) 有効数字が十数桁確保されることを意図した。それ故、実際の計算に用いる数値は、かなり多くの桁数となる。

数値の表示は簡略にし、小数点の下に 0 または 9 が並ぶ場合、例えば 0.00001673… を $0.0^4 1673\cdots$ と、0.99998326… を $0.9^4 8326\cdots$ と表わす。

第１０節　祖沖之の計算

私は予め、二種類の計算を試みた。その一は、第４節の計算公式 (1)～(9) によって、20 桁強の数値を用いて、AB → AC を計算した。各段階で得られた AC (次角の辺長) は、正弦関数(22) を用いた AC と、ほぼ 18 桁一致した。

ここで、私は祖沖之の計算段階を一部飛ばす《捷径》も用いた。それは第４節の(6)までは同じ過程を進め、(7)と(8)の代わりに第４節の補足に述べた関係

(10)　$AC^2 = 2CD = 2\,v$

(23)　$AC = \sqrt{2} \cdot \sqrt{CD} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{v}$

を用いる。

試みその二として、《逆向きの計算》（それは n 番目の (8) AC から、(7), (6) … と遡って、($n-1$)番目の (1) AB を求める計算）も実行した。公式は

(24)　$AB = AC \cdot \sqrt{1 - AC^2/4}$

も併用する。こうした計算によっても、ほぼ 18 桁が確保された。（この公式は検算の際に非常に有効である。）これで《祖沖之が行なったと推測される計算》を復元する準備ができた。私が一番苦心したのは、《どの段階で何桁を残して、以下を切り捨てるか？ 》という一般的な方針を立てることであった。

逆向きの計算と言うのは、例えば通常の「正廿四角形→正四十八角形」の内面積を計算する前に、逆向きに「正四十八角形→正廿四角形」の内面積を計算しておく。その時、正四十八角形の推定値 3.13262…（それは、正弦関数を用いた $24\sin(\pi/24)$ の値と、かなりの桁数が一致する）を元にする。これを 12 で割った $2\sin(\pi/24)$ の値 0.26105…（正廿四角形の AC に相当）を出発値に取り、第４節の計算を《逆変換》の形に直して、(8) から (1) へと辿る。この逆算により 0.51763…（正十二角形の AC）が得られる。一見した所、《見当外れ》な計算のように見えるが、実はこれが、予想外に《有効な》方法であった。

私は各種の数値実験を行なって、次の方針を立てた。劉徽が実行し、祖沖之がそれを踏襲したと思われる（第４節の）九つの計算段階がある。そのうちどの段階で切り捨てを行なったか？　それも有効数字としての数値の桁数を考慮して。私は熟慮と試行錯誤の末に、(3) AD^2 を得た所、(5) DO を得た所、(6) CD を得て(7) AC^2 に必要な CD^2 を作った所、(8) AC を得た所の四箇所で、有効数字 12～25 桁を残し、それ以下の数値を切り捨てた。求まった y=AC に、それに応ずる辺数 $6 \cdot 2^n$ を掛けて、(9)　内面積＝ $6 \cdot 2^n \times y$　を求めた。

計算結果を数表Ⅱに示した。 $AD = AB/2$, $DO^2 = 1 - AD^2$, $CD = 1 - DO$ の三つの欄は、掲載を省略した（前後の数値から簡単に復元できる）。

第１１節　祖沖之の計算（続き）

私の方法の目玉、逆向きの計算は、新奇なため理解を得にくいかもしれない。正 n 形の推定値（祖沖之が行ったと推測される計算方法により私が求めた値）から、上述のように計算順序を丁度逆に辿って、正 $n-1$ 角形を計算する。

さらにいま一つの工夫がある。目標とする値（未知）を上下両側から挟む値を、上下の限界として計算しておく。数表Ⅱの１行目と３行目の数値は、例えば正十二角形の辺長 AC を、上下に或る巾を隔てた数値として計算しておいた。最後の値から順々に遡って逆向きに計算し、正六角形の辺長 AB に至る。喩えを言えば、スキーの大回転競技の際、コースの両側に立てた「旗門」であり、プレイヤーは、その中間を滑り抜ける。急カーブを曲がり切れなければ、コー

スから逸れてしまう。２行目の数値（プレイヤーに相当）は、正六角形の辺長ABである。ここから順々に、通常のやり方で、正十二角形の辺長ACに至る計算をする。しかも四ケ所で、一定の小数位での切捨て（下線で示した）を行う。

これで私の意図がご理解頂けただろうか。毎回、通常のやり方で計算を進めて行き、途中の AD^2, DO, CD^2, AC の四箇所で、或る小数位で切捨てを実行すれば、切り捨てによる誤差（負数の作用をする）が積み重なって、数値は次第に偏ってゆき、期待する正 12288 角形の辺長に到達しない。どこか途中で「旗門」の外に逸れてしまうだろう。前述の如く、祖沖之が計算した正 24576 角の内面積は、第８節の不等式 (20) の中に納まっている。祖は所々、或る小数位で切捨てたにも拘わらず、我々にとって周知の π の近似値に到達した。

幾らでも長い桁数を用いたならば、それは可能であろうが、祖がさほど多くの桁数を用いた筈がない。そこそこの桁数を用いた計算で、不等式 (18) の中に納まるためには、どのような原則で切捨てを行えばよいのか、それを知りたい。数表Ⅱには凡ての段階の一覧表は掲げない。典型として六角→十二角のAC、十二角→廿四角のACと、最終段階の正3072角→6144角のAC、正6144角→正12288角のACの四つに絞る。それぞれから二倍角の面積を得る。途中の DO＝1－CD の段階で、一時上下の数値の大小が反転する。表示について、小数点の下に 0 または 9 が並ぶとき、９節末に述べた略記を用いた。検算のため、正四十八角の内面積 T から逆向きに正廿四角の内面積 S を求める際、CD を得るには、前段階で既知の AD^2 が必要で、$CD^2=AC^2-AD^2$, $CD=\sqrt{CD^2}$ と計算するのが普通である。代わりに第４節末で述べた、AD^2を経由せずに済む、次の短縮した関係式を用いた。

(10)　$CD=AC^2/2$

なお僅かの場合、99 を繰り上げた所がある。祖沖之が《切捨て》原則に基づいた、という仮説に反するが、数値 9 は繰り上げの効果（例えば .799 は .8 に極めて近い）があるので、例外的に「繰り上げ」を認めた。祖の時代に、「四捨五入が使われた」証拠があれば、文句なしに成立するが、私にはその確証がない（後日への課題として残す）。僅かの事例で例外的に「繰り上げ」を使用した。

最後の二つの内面積 3.14159 25164… と 3.14159 26191… は第９節の値

$$S=6144\sin(\pi/6144)=3.14159\,25166\cdots$$

及び

$$T=12288\sin(\pi/12288)=3.14159\,26193\cdots$$

と極めて近い。同所で私が述べた期待に合致する。祖沖之は、恐らくここまで私が《復元》したような計算を実行したであろう。これが本稿の結論である。

第１２節　祖沖之の限界

祖沖之は、彼の不等式を得た後、さらに計算を続けたかも知れない。精度が

高ければ、際限もなく続けられる。しかし、計算には有限桁を用いるのが常だから、一昨年の報告 [8] で関孝和について述べたのと同様に、或る限界に突き当たらざるを得ない。限界の様相を見るため、便宜的に、小数点下 9 桁程度の値を用いたと仮定し、さらに S と T に、あと二つの数値を追加しよう。

12288 角の内面積	$S = 3.14159\,25164\cdots$	（再記）
24576 角の 〃	$T = 3.14159\,26191\cdots$	（再記）
49152 角の 〃	$U = 3.14159\,26450\cdots$	
98304 角の 〃	$V = 3.14159\,26514\cdots$	

これから、それぞれ外面積

24576 角の外面積	$T' = T+(T-S) = 3.14159\,27218\cdots$
49152 角の 〃	$U' = U+(U-T) = 3.14159\,26707\cdots$
98304 角の 〃	$V' = V+(V-U) = 3.14159\,26578\cdots$

を求める。末位を丸めて、内外の面積で挟んだ不等式は

$$3.14159\,2619 < \pi < 3.14159\,2722$$
$$3.14159\,2645 < \pi < 3.14159\,2671$$
$$3.14159\,2651 < \pi < 3.14159\,2658$$

となる。小数 9 桁までの両側の数値は、内・外の面積が互いに接近して行き、このすぐ先で区別がつかなくなる！　第 1 節で予告したように、有限な桁数を用いた周率の計算は、（桁数に応じて）或る段階で打ち切らざるを得ない。

目標とした、祖沖之の不等式は、一行目（24576 角）で成立している。

文献

[1] 杉本敏夫：祖沖之の π 計算の復元過程と銭宝琮の推定値(英文)、祖沖之記念学術討論会、中国、涞水、2000.

[2] 杉本敏夫：祖沖之の密率 355/133 は如何に発見されたか(英文)、漢字文化圏の数学史・数学教育に関する国際会議、東京大学駒場校地、2005 .

[3] 銭宝琮著・川原秀城訳：中国数学史、原著：中国、北京、科学出版社、 1963. 翻訳：東京、みすず書房、1990.

[4] 王雲五主編：戴震校訂、算経十書(上)、(中文)、台湾商務印書館、1974.

[5] 靖玉樹主勘：中国歴代算書集成(上)、(中文)、中国、済南、山東出版社、1994.

[6] 銭宝琮：科学史論文集(中文)、中国、北京、科学出版社、1983.

[7] 杉本敏夫：関孝和研究への試論、京都大学数理解析研究所講究録、1677 号、2010.

[8] 杉本敏夫：関孝和の円周率の微増と限界、京都大学数理解析研究所講究録、1625 号、2009.